



# تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

## جلد اول

مؤلف:

مهدي تقدسی

بسمه تعالی

|                      |                                                                                                           |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| سرشناسه              | : تقدسی، مهدی، ۱۳۶۱                                                                                       |
| عنوان و نام پدیدآور  | : تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها                                                                      |
| مشخصات نشر           | : تهران؛ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، بسیج دانشجویی، ۱۳۹۴                                          |
| مشخصات ظاهری         | : ۶۹۲ ص: مصور، (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)                                                         |
| شابک                 | : ۲-۷۳-۶۹۲۷-۶۰۰-۹۷۸ : ج ۱                                                                                 |
| وضعیت فهرست‌نویسی    | : فیپا مختصر                                                                                              |
| وضعیت فهرست‌نویسی    | : فیپای مختصر                                                                                             |
| یادداشت              | : فهرست نویسی کامل این اثر در نشانی <a href="http://opac.nlai.ir">http://opac.nlai.ir</a> قابل دسترسی است |
| شناسه افزوده         | : دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، بسیج دانشجویی                                                       |
| شماره کتاب‌شناسی ملی | : ۳۷۹۳۳۳۷                                                                                                 |

|              |                                                    |
|--------------|----------------------------------------------------|
| نام کتاب     | : تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها               |
| مؤلف         | : مهدی تقدسی                                       |
| ناشر         | : بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی |
| نوبت چاپ     | : هشتم                                             |
| محل نشر      | : تهران،                                           |
| ناظر فنی چاپ | : منصور عبادی - سیدمحمد موسوی                      |
| تیراژ        | : ۱۰۰۰ جلد                                         |
| قیمت         | :                                                  |
| شابک         | :                                                  |



اسکن کنید

\* هرگونه چاپ و تکثیر از این اثر ممنوع و به موجب بند ۵ ماده ۲ قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان پیگرد قانونی دارد.  
نشانی: خیابان شریعتی، نرسیده به پل سید خندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، مرکز خدمات آموزشی نصیر  
تلفن: ۸۸۴۶۶۹۳۵-۸۸۴۶۴۷۸۰

شما هدف را این قرار بدهید که ملت و کشور شما در یک دوره‌ای، بتواند مرجع علمی و فناوری در همه‌ی دنیا باشد. یک وقتی من در جمع جوان‌های نخبه گفتم شما کاری کنید که در یک دوره‌ای – حالا این دوره ممکن است پنجاه سال دیگر یا چهل سال دیگر باشد – هر دانشمندی اگر بخواهد به آخرین فراورده‌های علمی دست پیدا کند، ناچار باشد زبان فارسی را که شما اثرتان را به زبان فارسی نوشته‌اید، یاد بگیرد؛ همچنان‌که امروز شما برای دستیابی به فلان علم، مجبورید فلان زبان را یاد بگیرید تا بتوانید کتاب مرجع را پیدا کنید و بخوانید. شما کاری کنید که در آینده، کشور شما یک چنین وضعی پیدا کند؛ و می‌توانید.

بیانات رهبر معظم انقلاب

در دیدار نخبگان جوان

۱۳۸۶/۰۶/۱۲

پس از استقبال فراوان از چاپ‌های قبلی کتاب تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها تالیف استاد گرانقدر جناب آقای مهندس مهدی تقدسی بار دیگر این فرصت در اختیار ما قرار گرفت تا با چاپ ویرایش جدید این کتاب خدمت دیگری به دانشجویان مشتاق دانش و داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد ارائه نماییم.

«مرکز خدمات آموزشی نصیر» وابسته به بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، اولین مرکز آموزشی در حیطه‌ی آمادگی آزمون‌های کارشناسی ارشد در کشور است که از شروع فعالیت‌های آن قریب به ۲۶ سال می‌گذرد. این مرکز که در سال ۱۳۷۱ توسط دانشجویان بسیجی دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی راه‌اندازی شد در طی این سال‌ها همواره در حال رشد و ترقی و تعالی بوده است و علاوه بر گسترش حیطه فعالیت‌ها و گسترش کمی مخاطبان آن، کیفیت آموزش و سطح علمی آن همواره روند رو به رشدی را داشته است. با توجه به اینکه این مرکز زیرمجموعه بسیج دانشجویی می‌باشد، اصلی‌ترین هدف خود را خدمت‌رسانی، عدالت آموزشی و ارتقاء علمی دانشجویان قرار داده و از این جهت شاخص‌ترین مرکز آموزشی در میان مؤسسات مشابه است. و این حقیقت فراتر از یک ادعا می‌باشد و از این جهت همواره به عنوان مرکزی خوش‌نام و موفق در میان اساتید و دانشجویان محترم مطرح بوده است و به علت اینکه مسئولین و کادر این مرکز خود نیز اغلب از دانشجویان دانشگاه‌های تهران هستند بیشترین ارتباط را با دانشجویان مخاطب این مرکز دارا بوده و از نقطه نظرات آنان همواره استفاده نموده است. در زیر نکاتی برای آشنایی بیشتر شما مخاطب گرامی با این مرکز ذکر می‌شود:

۱. استفاده از اساتید مجرب و طراز اول دانشگاه‌های تهران که به لحاظ علمی جزو سرآمدترین اساتید کشور می‌باشند از اصلی‌ترین نقاط قوت این مرکز است. اعتقاد ما بر این است که به این نقطه از موفقیت هرگز نائل نمی‌شدیم مگر با مساعدت و تلاش و همکاری صادقانه اساتید گرانقدری که بزرگ‌ترین انگیزه آنان نیز در این مسیر، هدف مقدس و والایی است که سرلوحه فعالیت‌های مرکز قرار گرفته است.

۲. رویکرد ما همواره افزایش سطحی کیفی فعالیت‌ها در عین ارائه آن با کمترین هزینه می‌باشد که با تحقق این مهم، هدف اصلی ما که خدمت‌رسانی و ارتقاء هر چه بیشتر علمی دانشجویان این مرکز و بوم در کنار عدالت آموزشی می‌باشد محقق می‌شود.

۳. با توجه به برگزاری ۲۶ سال کلاس‌های آموزشی و ۱۶ سال آزمون‌های آزمایشی، تجربه گرانقدری اندوخته‌ایم که یکی از عوامل اصلی موفقیت روز افزون ما است. این تجربیات که در مواردی سایر مؤسسات نیز از آن استفاده کرده‌اند و از آن الگو گرفته‌اند، همواره این مرکز را در جایگاه پیشروترین مؤسسه آموزشی کارشناسی ارشد و دکتری قرار داده است.

۴. با توجه به اهداف ذکر شده، شهریه ارائه شده کمترین مقدار را در میان تمام مؤسسات مشابه دارا می‌باشد، که این اختلاف عمیق بعضاً باعث تعجب و ایجاد سؤال برای مخاطبانی گردیده که تازه با این مرکز آشنا شده‌اند. ولی آشنایی بیشتر آنان با مجموعه راه را در جهت دریافت پاسخ باز می‌نماید.

با توجه به سابقه درخشان این مرکز در طی این سال‌ها و ضعف موجود در زمینه کتاب‌های کارشناسی ارشد به لحاظ کیفی، این مجموعه تصمیم بر آن گرفت که در این زمینه نیز وارد شده و افتخاری دیگر به افتخارات خود بیفزاید.

"مجموعه کتاب‌های کارشناسی ارشد نصیر" که از این پس به مرور در اختیار علاقمندان قرار خواهد گرفت، مجموعه‌ای بی‌نظیر با رویکردی نوین و ویژگی‌های منحصر به فرد می‌باشد به طوری که داوطلبان بعد از مراجعه به آن، نیازی به استفاده از منبع دیگری نخواهند داشت و نظر به همکاری اساتید گرانقدری که کوله‌باری از تجربه ارزشمند علمی را در سطح دانشگاه‌ها و کلاس‌های مرکز خدمات آموزشی نصیر با خود دارند و رعایت بالاترین کیفیت در صفحه آرایی و چاپ، دانشجویان عزیز لذت واقعی یادگیری را خواهند چشید. در این جا لازم است از زحمات فراوان استاد گران‌قدر جناب آقای مهدی تقدسی در تألیف این اثر ارزشمند کمال قدردانی را بنمائیم. در پایان اجر معنوی فعالیت‌های این مرکز را تقدیم می‌کنیم به شهدای دفاع مقدس، این شمع‌های همیشه فروزان بشریت که با مقاومت مردانه خود حماسه‌ای جاوید آفریدند.

مرکز خدمات آموزشی نصیر

## مقدمه مؤلف

«سپاس خداوندی که سخنوران از ستودن او عاجزند، و حسابگران از شمارش نعمتهای او ناتوان، و تلاشگران از ادای حق او درمانده‌اند، خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حد و مرزی وجود ندارد، و تعریف کاملی نمی‌توان یافت و برای خدا وقتی معین، و سرآمدی مشخص نمی‌توان تعیین کرد...»<sup>۱</sup>

درس «تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها» که احتمالاً در بین عموم دانشجویان با نام درس «سیگنال» شناخته شده است، ویژگی‌های منحصر به فردی نسبت به بقیه دروس منتخب برای آزمون کارشناسی ارشد دارد و نیاز است که به آن توجه ویژه‌ای صورت گیرد. گذشته از اینکه کاربرد این درس و مفاهیم آن در گرایش مخابرات سیستم بیش از سایر دروس است و در گرایش‌های مهندسی پزشکی و کنترل نیز جایگاه ویژه‌ای دارد، می‌توان با سرمایه‌گذاری مناسب و صحیح روی آن، در آزمون کنکور نیز از مزایا و تأثیر قابل توجه آن استفاده نمود. علیرغم سادگی این درس نسبت به بقیه دروس کنکور، بسیاری از داوطلبین کنکور کارشناسی ارشد، نمی‌توانند نتیجه قابل قبولی از آن دریافت کنند و در بسیاری از مواقع، تعداد اشتباهات زیاد داوطلبان در حل تست‌های این درس باعث می‌شود نتیجه غیر قابل انتظاری برای آن‌ها رقم بخورد؛ بسیاری از تست‌های این درس، ظاهراً ساده اما دارای نکات ظریفی هستند که ندانستن آن نکات، نه به پاسخ ندادن تست، بلکه به پاسخ دادن اشتباه تست منجر خواهد شد؛ زیرا در بسیاری از اوقات، پاسخ‌های نادرست احتمالی داوطلبین نیز در گزینه‌ها وجود دارد. بنابراین باید زمان مناسبی برای یادگیری دقیق مفاهیم و نکات این درس صرف نمود. در کتاب حاضر سعی شده است تمامی مفاهیم و نکات مورد نیاز برای تسلط کامل شما و کسب نمره بسیار خوب در این درس، به طور کامل و با زبانی گویا به همراه تست‌ها و مثال‌های متنوع ارائه شود.

## ویژگی‌های کلی کتاب

### بیان کامل درس به همراه مفاهیم مورد نیاز:

در این کتاب فرض بر این بوده است که خواننده فقط با ریاضیات مقدماتی (مشتق، انتگرال و ...) آشنایی کلی دارد. بنابراین متن درس به طور کامل و از پایه ارائه شده است. بسیاری از مفاهیم بیان شده در کتاب، اختصاصی و منحصر به فرد است و به بسیاری از ابهامات در مورد مفاهیم پایه‌ای پاسخ می‌دهد و احتمالاً در آرامش ذهنی شما برای یادگیری مطالب دیگر درس، تأثیر به‌سزایی خواهد داشت. ضمناً این کتاب به عنوان یک کتاب درسی کامل برای گذراندن درس سیگنال در دانشگاه نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در واقع اگرچه این کتاب، در مجموعه کتاب‌های کنکوری انتشار یافته است، اما هدف آن صرفاً کنکور نیست و بسیاری از مفاهیمی که مورد نیاز یک مهندس برق می‌باشد (البته بدون زیاده‌گویی و اضافات)، در این کتاب ارائه شده است و ان شاء الله بعد از مطالعه کتاب، کاملاً به این درس و همچنین زمینه پردازش سیگنال که یکی از کاربردی‌ترین و جذاب‌ترین زمینه‌های رشته مهندسی برق می‌باشد، علاقه‌مند خواهید شد.

<sup>۱</sup> نهج البلاغه - خطبه اول - ترجمه محمد دشتی

### حل تشریحی تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد از ابتدا تاکنون:

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد که تا زمان نوشتن کتاب در دسترس بوده‌اند، در انتهای فصل‌های کتاب، به‌طور دقیق و کاملاً تشریحی حل شده‌اند.<sup>۱</sup> در جلد دوم کتاب نیز بسیاری از تست‌های مهم آزمون دکتری (مخابرات سیستم) و وزارت بهداشت (مهندسی پزشکی) ارائه شده است که به همه داوطلبین در همه آزمون‌ها توصیه می‌گردد همه آن‌ها را مطالعه نمایند، زیرا تفاوت چندانی از لحاظ محتوایی و سطح علمی بین آن‌ها وجود ندارد.

یکی از فاکتورهای مهم در حل یک تست، ارائه یک روش کلی و سراسر و در عین حال ساده و کوتاه می‌باشد، به‌طوری‌که بتوان تست‌های مشابه را نیز با همان روش به راحتی حل نمود. بنابراین در حل تست‌ها و مثال‌ها سعی شده است تا حد امکان، از این نوع روش‌ها استفاده شود تا دانشجو بدون نیاز به روش‌های ابتکاری (که در جلسه کنکور تقریباً غیرممکن است که به ذهن داوطلب برسد)، بتواند یک تست را با آرامش کامل و بدون اضطراب حل کند. البته این به معنای آن نیست که روش‌های ارائه شده، روش‌های تستی نیستند. اما روش تستی، باید طوری باشد که در صورت تغییر گزینه‌ها و تغییرات اندک در تست نیز قابل استفاده باشد. روشی که به گزینه‌ها وابستگی مستقیم داشته باشد و فقط برای یک تست خاص ارائه شود، روش سودمندی نخواهد بود و احتمالاً چنین روش‌هایی هیچ‌گاه در جلسه کنکور به ذهن شما نخواهد رسید.

### نحوه مناسب بیان نکات:

در این کتاب تقریباً برای هر نکته، هم توضیح متنی و هم توضیحات به صورت بلوکی (با رنگ آبی) داده شده است تا به یادگیری و تثبیت آن‌ها در ذهن کمک کند. توصیه می‌گردد فرمول‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده‌اند را نیز به خاطر بسپارید. به هر حال بسیاری از نکات و فرمول‌های بیان شده، در کتاب اثبات شده‌اند و پیشنهاد می‌شود اثبات‌ها را نیز مطالعه کرده و یاد بگیرید؛ زیرا گاهی اوقات، روش‌ها و مفاهیم بیان شده در اثبات نکات و فرمول‌ها، در حل بعضی از تست‌های کنکور مفید واقع می‌شوند و همچنین یادگیری این اثبات‌ها به حفظ کردن نکات و فرمول‌های مربوطه، کمک فراوانی می‌کند. البته به دانشجویان علاقه‌مند و خوانندگانی که خواهان تسلط بیشتر بر روی مفاهیم درس هستند، توصیه می‌شود برای دریافت فایل اثبات‌هایی که از اهمیت کمتری برخوردار بوده‌اند، به کانال تلگرامی که در انتهای مقدمه معرفی خواهد شد، مراجعه نمایند. از آنجا که در حل بسیاری از تست‌ها، به نکات مربوطه با ذکر شماره نکته اشاره شده است، برای دسترسی سریع به نکات، در پیوست کتاب نیز مجدداً همه این نکات به‌طور خلاصه ارائه شده‌اند.

### موضوع‌بندی منحصربه‌فرد کتاب:

یکی از پیچیدگی‌هایی که در درس سیگنال وجود دارد، نکات، فرمول‌ها و مطالب مشابه در بخش‌های مختلف است که معمولاً موجب سردرگمی دانشجویان می‌گردد. برای حل این مشکل، عناوین و موضوعات این کتاب، طوری مرتب شده‌اند که تا حد امکان، مطالب مشابه و وابسته، به صورت یک‌جا و در کنار هم بیان شوند تا به انسجام ذهنی خواننده در یادگیری مطالب کمک کند. به همین دلیل فهرست و عناوین این کتاب با بقیه کتب مربوط به درس سیگنال، به طور کلی متفاوت است. همین موضوع باعث شده است که حجم کتاب و به تبع آن احتمالاً زمان مورد

<sup>۱</sup> البته تعدادی از تست‌های نادرست یا تکراری یا ... که اکثراً نیز از آزمون دانشگاه آزاد بوده‌اند، به دلیل بی‌اهمیت بودن، حذف شده‌اند. در برخی تست‌ها نیز اصلاحات یا تغییرات مورد نیاز به‌طوری که به محتوای تست، لطمه‌ای وارد نشود، اعمال شده است. همچنین تست‌های سال‌های اخیر به همراه پاسخ آن‌ها را نیز می‌توانید از کانال تلگرامی که در انتهای مقدمه معرفی شده است، دریافت نمایید.

نیاز شما برای یادگیری مطالب، به‌طور چشم‌گیری کاهش یابد. به عنوان مثال، روش‌های تحلیل سیستم‌های LTI در دو حوزه زمان و فرکانس و خواص آن‌ها، به صورت یک‌جا بیان شده است و یا تبدیل فوری و سری فوری در دو حالت زمان پیوسته و زمان گسسته به دلیل شباهت‌های زیاد آن‌ها، در کنار هم معرفی و بررسی شده‌اند.

مطالب این کتاب به دو قسمت متوسط و پیشرفته در دو جلد جداگانه تفکیک شده است. جلد اول شامل مطالب پایه‌ای و متوسط است که طبق برآورد صورت گرفته از سؤالات سال‌های اخیر کنکور ارشد، در صورت تسلط کامل روی آن، ان شاء الله می‌توان حداقل درصد ۴۰ تا ۶۰ را در آزمون ارشد کسب نمود. جلد دوم نیز شامل مباحث پیشرفته و تست‌های تألیفی است که با مطالعه و یادگیری کامل آن، به امید خدا می‌توان به درصد ۱۰۰ نیز رسید.

تفکیک کتاب به دو سطح متوسط و پیشرفته در دو جلد جداگانه دو مزیت عمده دارد؛ اولاً افرادی که به علت کمبود وقت و یا دلایل دیگر، قصدی برای کسب درصد بالا در این درس در آزمون کنکور ندارند، می‌توانند صرفاً جلد اول را تهیه کرده و بدون از دست دادن پیوستگی مطالب و صرف هزینه اضافه، به هدف خود دست یابند. ثانیاً دانشجویانی که خواهان تسلط کامل بر روی این درس و کسب بالاترین درصد در آزمون کنکور هستند و تمایل به مطالعه هر دو جلد کتاب دارند، به‌طور خودکار از روش مطالعه دو مرحله‌ای استفاده خواهند کرد. روش مطالعه دو مرحله‌ای که جزء بهترین روش‌های مطالعه است، به این معنی است که برای یادگیری و تسلط کامل بر روی یک درس، در مرحله اول، صرفاً کلیات و مطالب پایه‌ای و مهم‌تر درس فرا گرفته می‌شود، و سپس در مرحله دوم به همراه مرور مطالب مرحله اول، وارد جزئیات و مطالب پیشرفته‌تر شده و به تسلط کامل بر روی درس می‌رسیم. البته روش پیشنهادی مؤلف برای مطالعه این کتاب، در قسمت‌های بعد به‌طور دقیق بیان خواهد شد.

### معرفی فصل‌های کتاب

این مجموعه، شامل دو جلد و  $17 = 8 + 9$  فصل می‌باشد که متن هر فصل، شامل تعداد زیادی مثال بوده و تست‌های کنکور نیز در انتهای فصول ارائه شده است. در انتهای فصول دهم تا هفدهم نیز بعد از تست‌های کنکور، تست‌های تألیفی نیز آورده شده و سعی شده است که از مسائل مرجع اصلی درس سیگنال یعنی کتاب آلن اینپایم یا ایده‌های خوب و مهم آن‌ها نیز در این تست‌ها استفاده شود و بنابراین نیازی به مطالعه جداگانه مسائل آن کتاب نخواهد بود. همچنین از آزمون‌های آزمایشی سال‌های گذشته مؤسسه نصیر نیز در طراحی تست‌های تألیفی کمک گرفته شده است؛ البته بسیاری و شاید اکثر این تست‌ها با صرف وقت و تلاش فراوان، توسط مؤلف طراحی شده و حاوی نکات و ایده‌های جالب و جدیدی می‌باشند. در فصل‌های دهم تا شانزدهم نیز بعد از تست‌های تألیفی، تعدادی تست خودآزمایی به همراه کلید سؤالات، ارائه شده است که برای دریافت پاسخ تشریحی آن‌ها می‌توانید به سایت مؤلف مراجعه نمایید.

فصل اول به معرفی انواع سیگنال‌ها و نحوه کار کردن با آن‌ها اختصاص دارد. در فصل دوم به تعریف سیستم و معرفی انواع سیستم‌ها و بررسی خواص آن‌ها خواهیم پرداخت. در فصل سوم، ضمن تعریف انتگرال و جمع کانولوشن، دسته مهمی از سیستم‌ها به نام سیستم‌های LTI (خطی تغییرناپذیر با زمان) را در حوزه زمان بررسی می‌کنیم. البته در این فصل سیستم‌های خطی را نیز معرفی خواهیم نمود. در انتها نیز با توابع ویژه (مشتقات و انتگرال‌های سیگنال ضربه) آشنا خواهیم شد. در فصل چهارم، مفهوم فرکانس و حوزه فرکانس را مطرح خواهیم کرد و سپس به‌طور مختصر، سری فوری و تبدیل فوری را معرفی می‌کنیم. فصل چهارم، یک فصل مفهومی است و از آن به‌طور خاص، تستی در کنکور مطرح نشده است، ولی برای یادگیری و درک بهتر فصل‌های بعد، از

اهمیت زیادی برخوردار است. در فصل پنجم به تعریف تبدیل فوریه زمان پیوسته و زمان گسسته در کنار هم خواهیم پرداخت. در کتب مختلف، تبدیل فوریه معمولاً بعد از سری فوریه مطرح می‌شود، اما به دلیل اینکه در فصل چهارم، سری فوریه به طور مختصر معرفی شده و همچنین به علت سادگی بیشتر فرمول‌ها، خواص و محاسبات تبدیل فوریه نسبت به سری فوریه، در این کتاب ابتدا تبدیل فوریه عنوان شده است. تبدیل فوریه زمان پیوسته و تبدیل فوریه زمان گسسته شباهت‌های زیادی با هم دارند، بنابراین بررسی آن‌ها در کنار هم می‌تواند به یادگیری و انسجام ذهنی شما کمک کند. فصل ششم نیز به سری فوریه زمان پیوسته و سری فوریه زمان گسسته اختصاص دارد که مانند تبدیل فوریه، در کنار هم بررسی شده‌اند. در فصل هفتم و هشتم نیز به ترتیب به تبدیل لاپلاس و تبدیل  $\mathcal{Z}$  پرداخته شده است. فصل نهم که مهم‌ترین فصل جلد اول کتاب است، حاصل فصل‌های قبل می‌باشد و شاید بتوان گفت که به طور متوسط بیشترین سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهد. در این فصل به کاربرد حوزه فرکانس (سری فوریه، تبدیل فوریه، لاپلاس و  $\mathcal{Z}$ ) در تحلیل سیستم‌های LTI و خواص آن‌ها خواهیم پرداخت و در واقع بررسی همه این‌ها در کنار هم صورت خواهد گرفت تا درک بهتری از این مطالب به دست آید. در جلد دوم به بیان مطالب تکمیلی و پیشرفته‌تر خواهیم پرداخت. فصل‌های دهم تا پانزدهم، مطالب پیشرفته‌تر فصول جلد اول و تست‌های دشوارتر کنکور و همچنین تست‌های تألیفی را شامل می‌شود. فصل شانزدهم با عنوان «شناسایی سیستم‌ها و خواص آن‌ها»، فصلی جذاب و حاوی مطالب جالبی است که بسیاری از ایده‌های بیان شده، کاملاً اختصاصی و منحصر به این کتاب می‌باشد. در این فصل، سعی کردیم از دریچه‌ای جدید به بعضی از تست‌های مفهومی و بعضاً بسیار سخت کنکور پرداخته و دشوارترین سؤالات را با نگاهی ویژه به ساده‌ترین سؤالات تبدیل نماییم. در این فصل، تست‌های جدیدی نیز مورد بررسی قرار خواهند گرفت که می‌تواند به آمادگی شما برای پاسخ‌گویی به هر سؤالی از این مبحث کمک کند. در فصل هفدهم نیز به طور مختصر به موضوع نمونه‌برداری از سیگنال‌های زمان پیوسته پرداخته شده که البته در سال‌های اخیر، خیلی مورد توجه طراحان تست کنکور ارشد قرار نگرفته است.

### روش پیشنهادی مطالعه کتاب

برای ارائه روش مطالعه این کتاب، ابتدا به ترتیب اولویت مطالب آن می‌پردازیم. طبیعتاً جلد اول کتاب نسبت به جلد دوم از اهمیت بیشتری برخوردار است. توصیه می‌گردد تا به تسلط بالایی بر روی جلد اول کتاب نرسیدید (که این کار احتمالاً با مطالعه کامل دو مرتبه‌ای کتاب به همراه همه تست‌های آن صورت می‌گیرد)، جلد دوم را آغاز نکنید. افرادی که قصد دارند به تسلط بالایی در این درس برسند، بعد از یادگیری کامل جلد اول کتاب، به مطالعه جلد دوم بپردازند. در جلد دوم نیز طبیعتاً متن درس و تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد انتهای فصول، از اهمیت بیشتری نسبت به تست‌های تألیفی برخوردار است. تست‌های خودآزمایی نیز در اولویت آخر قرار دارند. البته نظر مؤلف، حتی الامکان مطالعه همه کتاب با تمام جزئیات می‌باشد، اما در صورت نداشتن فرصت کافی، می‌توانید با توجه به اولویتی که بیان شد، صرفاً مطالب مهم‌تر را مطالعه نمایید. به هر حال هر چقدر بیشتر تلاش کنید و زمان بیشتری برای مطالعه و یادگیری این درس اختصاص دهید، ان شاء الله نتیجه بهتری خواهید گرفت. همچنین دقت کنید که فصل‌های نهم و پانزدهم از اهمیت بیشتری نسبت به بقیه فصول برخوردار هستند، ولی همه فصل‌های قبل آن، تا حدودی پیش‌نیاز این فصل می‌باشند. البته بودجه‌بندی سؤالات

در درس سیگنال در سال‌های اخیر بسیار متغیر بوده و نمی‌توان بیان کرد که کدام موضوع (سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و ...) به‌طور قطع بیشترین سؤالات را به خود اختصاص خواهد داد. لازم به ذکر است که طبق تجربه سال‌های گذشته، در صورت امکان، سعی می‌شود از اوایل تابستان، یک برنامه مطالعاتی منظم به همراه آزمون‌های تألیفی، در کانال قرار داده شود تا افرادی که قصد مطالعه این کتاب را دارند، با انگیزه بیشتری بتوانند از آن استفاده نمایند.

این کتاب مخصوصاً برای افرادی که به جزئیات مطالب و روش‌های حل یک تست دقت می‌کنند، بسیار مفید خواهد بود، زیرا سعی شده است که مباحث مختلف و راه‌حل‌های ارائه شده، به‌طور دقیق و جزئی بیان شوند. در بعضی از تست‌ها نیز چندین راه حل ارائه شده است که این موضوع به تسلط بیشتر و انسجام ذهنی شما در یادگیری روش‌های مختلف، کمک می‌کند. بنابراین توصیه می‌شود شما نیز زمان کافی را برای مطالعه دقیق کتاب و مطالعه همه روش‌های حل یک تست و حتی توضیحات داده شده در پاورقی‌های کتاب، اختصاص دهید. البته وسواس و صرف زمان بیش از حد برای یادگیری و فهم یک مطلب، علاوه بر اتلاف وقت، ممکن است باعث افزایش اضطراب نیز بشود. در صورت متوجه نشدن یک مطلب یا راه حل ارائه شده، کمی روی آن فکر کرده و مباحث مرتبط با آن را مرور نمایید؛ و اگر باز به نتیجه نرسیدید، از آن عبور کرده و در دوره‌های بعد به آن بپردازید. خیلی از اوقات نیز هنگام مطالعه یک مبحث جدید، ابهامات مباحث دیگر کاملاً برطرف می‌شود. بنابراین در هیچ نقطه‌ای متوقف نشوید؛ «پیش بروید، فهم موضوع به دنبال شما خواهد آمد»<sup>۱</sup>

در پایان از خانواده عزیزم و همه کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند، صمیمانه تشکر می‌کنم. همچنین مراتب قدردانی خود را از مرکز خدمات آموزشی نصیر که انتشار این کتاب را تقبل کرده ابراز می‌نمایم. از آنجا که تایپ اکثر یا تقریباً تمامی مطالب و همچنین صفحه‌آرایی نهایی کتاب، توسط خود مؤلف صورت گرفته، اشتباهات تایپی به حداقل خود رسیده است، اما هرگز نمی‌توان ادعا کرد که این کتاب، از نظر املائی، ادبی و یا حتی محتوای علمی، بدون اشکال است. اصلاحیه و فایل‌های جانبی کتاب (که در متن درس به سایت ارجاع داده شده‌اند) را می‌توانید از کانال تلگرامی زیر دریافت نمایید. همچنین گروهی نیز برای ارتباط با دانشجویان و رفع اشکال درس سیگنال ایجاد گردیده که آدرس آن در کانال قرار داده شده است. ان شاء الله خوشحال خواهیم شد که پیشنهادات و انتقادات شما را در مورد جنبه‌های مختلف کتاب از هر طریق ممکن دریافت نمایم.

امیدوارم که این کتاب تأثیری هرچند اندک در پیشرفت علمی و اعتلای کشور عزیزمان در جهت آرمان‌های انقلاب اسلامی داشته باشد و روزی فرا رسد که «در دنیا هر کسی بخواهد به یافته‌های تازه علمی دست پیدا کند، مجبور بشود زبان فارسی یاد بگیرد»<sup>۲</sup>.

Email: Taghaddosi.mahdi@gmail.com

Channel: @mtsignal

Weblog: mtsignal.blogsky.com

مهدی تقدسی - بهمن‌ماه ۱۳۹۶

<sup>۱</sup> دالامبر - ریاضیدان معروف

<sup>۲</sup> مقام معظم رهبری - بیانات در دیدار شرکت کنندگان همایش ملی نخبگان جوان - مهرماه ۱۳۹۲

## فهرست مطالب

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| فصل اول: سیگنال‌ها.....                          | ۱   |
| مقدمه.....                                       | ۲   |
| تعاریف و عملیات ریاضی بر روی سیگنال‌ها.....      | ۲   |
| جمع و ضرب سیگنال‌ها.....                         | ۳   |
| مشتق یا تفاضل یک سیگنال.....                     | ۵   |
| انتگرال (مساحت) یا سیگمای (مجموع) یک سیگنال..... | ۷   |
| تبدیل‌های متغیر مستقل.....                       | ۱۱  |
| سیگنال‌های متناوب.....                           | ۱۹  |
| سیگنال‌های زوج و فرد.....                        | ۲۶  |
| سیگنال‌های حقیقی و مختلط.....                    | ۳۰  |
| انرژی و توان سیگنال.....                         | ۳۳  |
| انرژی و توان سیگنال‌های زمان‌پیوسته.....         | ۳۳  |
| انرژی و توان سیگنال‌های زمان‌گسسته.....          | ۳۴  |
| سیگنال‌های پایه.....                             | ۳۹  |
| سیگنال‌های نمایی زمان‌پیوسته.....                | ۴۰  |
| سیگنال‌های نمایی زمان‌گسسته.....                 | ۴۱  |
| سیگنال‌های ضربه و پله زمان‌گسسته.....            | ۴۳  |
| سیگنال‌های پله و ضربه زمان‌پیوسته.....           | ۵۴  |
| خلاصه.....                                       | ۶۳  |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....              | ۶۴  |
| فصل دوم: سیستم‌ها.....                           | ۷۳  |
| مقدمه.....                                       | ۷۴  |
| تعریف سیستم.....                                 | ۷۴  |
| اتصال سیستم‌ها.....                              | ۸۶  |
| نمایش بلوکی سیستم‌ها.....                        | ۸۸  |
| خواص سیستم‌ها.....                               | ۸۹  |
| سیستم‌های خطی.....                               | ۹۰  |
| سیستم‌های بدون حافظه (لحظه‌ای).....              | ۹۶  |
| سیستم‌های علی (سببی - بدون پیش‌بینی).....        | ۹۸  |
| سیستم‌های TI (تغییرناپذیر با زمان).....          | ۱۰۲ |
| سیستم‌های پایدار.....                            | ۱۰۸ |
| سیستم‌های وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر).....           | ۱۱۱ |
| خلاصه.....                                       | ۱۳۶ |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....              | ۱۳۷ |

## فصل سوم: سیستم‌های LTI (خطی تغییرناپذیر با زمان) ..... ۱۷۳

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| مقدمه.....                                                | ۱۷۴ |
| انتگرال کانولوشن.....                                     | ۱۷۴ |
| خواص کانولوشن.....                                        | ۱۸۵ |
| انتگرال کانولوشن متناوب.....                              | ۱۹۰ |
| جمع کانولوشن.....                                         | ۱۹۱ |
| خواص جمع کانولوشن.....                                    | ۱۹۳ |
| جمع کانولوشن متناوب.....                                  | ۱۹۴ |
| سیستم‌های LTI زمان گسسته.....                             | ۱۹۶ |
| رابطه کلی سیستم‌های LTI زمان گسسته.....                   | ۱۹۶ |
| رابطه پاسخ ضربه و پاسخ پله.....                           | ۱۹۸ |
| سیستم‌های LTI زمان پیوسته.....                            | ۱۹۹ |
| رابطه کلی سیستم‌های LTI زمان پیوسته.....                  | ۱۹۹ |
| رابطه پاسخ ضربه و پاسخ پله.....                           | ۲۰۱ |
| خواص سیستم‌های LTI.....                                   | ۲۰۲ |
| ویژگی‌های پاسخ ضربه در سیستم‌های LTI.....                 | ۲۰۴ |
| سیستم‌های LTI و بدون حافظه.....                           | ۲۰۴ |
| سیستم‌های LTI و علی.....                                  | ۲۰۵ |
| سیستم‌های LTI و پایدار.....                               | ۲۰۶ |
| سیستم‌های LTI و وارون‌پذیر.....                           | ۲۰۶ |
| سیستم‌های خطی.....                                        | ۲۱۲ |
| رابطه سیستم‌های خطی زمان گسسته.....                       | ۲۱۳ |
| رابطه سیستم‌های خطی زمان پیوسته.....                      | ۲۱۵ |
| رابطه پاسخ ضربه انتقال یافته و پاسخ پله انتقال یافته..... | ۲۱۶ |
| توابع ویژه (ضربه، مشتقات و انتگرال‌های آن).....           | ۲۱۷ |
| خلاصه.....                                                | ۲۲۰ |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....                       | ۲۲۱ |

## فصل چهارم: حوزه فرکانس..... ۲۵۵

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| مقدمه.....                                             | ۲۵۶ |
| تعریف فرکانس.....                                      | ۲۵۶ |
| مفهوم فیزیکی فرکانس.....                               | ۲۵۷ |
| پاسخ سیستم‌های LTI زمان پیوسته به نمایی‌های مختلط..... | ۲۵۷ |
| پاسخ سیستم‌های LTI زمان گسسته به نمایی‌های مختلط.....  | ۲۵۸ |
| خاصیت تناوبی فرکانسی زمان گسسته.....                   | ۲۵۹ |
| سری فوریه.....                                         | ۲۶۱ |
| سری فوریه سیگنال‌های زمان پیوسته.....                  | ۲۶۱ |
| سری فوریه سیگنال‌های زمان گسسته.....                   | ۲۶۵ |

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| تبدیل فوریه.....                                     | ۲۶۹        |
| تبدیل فوریه سیگنال‌های زمان‌پیوسته.....              | ۲۶۹        |
| تبدیل فوریه سیگنال‌های زمان‌گسسته.....               | ۲۷۱        |
| خلاصه.....                                           | ۲۷۴        |
| <b>فصل پنجم: تبدیل فوریه.....</b>                    | <b>۲۷۵</b> |
| مقدمه.....                                           | ۲۷۶        |
| تبدیل فوریه سیگنال‌های مهم.....                      | ۲۷۶        |
| همگرایی تبدیل فوریه.....                             | ۲۸۶        |
| خواص تبدیل فوریه.....                                | ۲۹۱        |
| خواص تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی.....               | ۳۱۱        |
| خلاصه.....                                           | ۳۱۵        |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....                  | ۳۱۶        |
| <b>فصل ششم: سری فوریه.....</b>                       | <b>۳۴۷</b> |
| مقدمه.....                                           | ۳۴۸        |
| محاسبه سری فوریه سیگنال‌های متناوب.....              | ۳۴۸        |
| همگرایی سری فوریه.....                               | ۳۵۹        |
| خواص سری فوریه.....                                  | ۳۶۲        |
| خواص سری فوریه سیگنال‌های حقیقی.....                 | ۳۷۷        |
| خلاصه.....                                           | ۳۸۰        |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....                  | ۳۸۱        |
| <b>فصل هفتم: تبدیل لاپلاس.....</b>                   | <b>۳۹۷</b> |
| مقدمه.....                                           | ۳۹۸        |
| تبدیل لاپلاس سیگنال‌های مهم.....                     | ۳۹۹        |
| خواص ناحیه همگرایی.....                              | ۴۰۶        |
| رابطه تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه.....                | ۴۱۰        |
| خواص تبدیل لاپلاس.....                               | ۴۱۲        |
| خلاصه.....                                           | ۴۲۹        |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....                  | ۴۳۰        |
| <b>فصل هشتم: تبدیل <math>\mathcal{Z}</math>.....</b> | <b>۴۳۹</b> |
| مقدمه.....                                           | ۴۴۰        |
| تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های مهم.....              | ۴۴۲        |
| خواص ناحیه همگرایی.....                              | ۴۴۶        |
| رابطه تبدیل $\mathcal{Z}$ و تبدیل فوریه.....         | ۴۴۸        |
| خواص تبدیل $\mathcal{Z}$ .....                       | ۴۵۰        |
| خلاصه.....                                           | ۴۶۷        |
| تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....                  | ۴۶۸        |

## فصل نهم: تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان و فرکانس..... ۴۸۱

|     |                                                               |
|-----|---------------------------------------------------------------|
| ۴۸۲ | مقدمه.....                                                    |
| ۴۸۲ | رابطه سیستم‌های LTI در حوزه زمان و فرکانس.....                |
| ۴۸۶ | رابطه پاسخ ضربه و پاسخ پله در حوزه زمان و فرکانس.....         |
| ۴۸۸ | محاسبه پاسخ ضربه در یک سیستم LTI.....                         |
| ۴۹۲ | محاسبه پاسخ ضربه در حالت زمان پیوسته.....                     |
| ۴۹۶ | محاسبه پاسخ ضربه در حالت زمان گسسته.....                      |
| ۴۹۹ | محاسبه پاسخ به ورودی‌های جدید در یک سیستم LTI.....            |
| ۵۰۳ | پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی‌های نمایی و ورودی‌های متناوب..... |
| ۵۱۴ | بررسی خواص سیستم‌ها در حوزه فرکانس.....                       |
| ۵۱۵ | بررسی LTI بودن یک سیستم.....                                  |
| ۵۱۷ | بررسی وارون پذیری یک سیستم LTI.....                           |
| ۵۲۰ | بررسی علی بودن یک سیستم LTI.....                              |
| ۵۲۱ | بررسی پایداری یک سیستم LTI.....                               |
| ۵۲۴ | سیستم‌های LTI علی و پایدار.....                               |
| ۵۲۶ | سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی.....    |
| ۵۲۶ | معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت.....                      |
| ۵۲۷ | معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت.....                         |
| ۵۲۹ | نمایش بلوکی سیستم‌های LTI.....                                |
| ۵۳۲ | اتصالات پایه.....                                             |
| ۵۳۶ | فیلترها.....                                                  |
| ۵۳۶ | فیلترهای زمان پیوسته.....                                     |
| ۵۳۹ | فیلترهای زمان گسسته.....                                      |
| ۵۴۴ | خلاصه.....                                                    |
| ۵۴۵ | تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد.....                           |
| ۶۵۳ | پیوست‌ها.....                                                 |
| ۶۵۴ | پیوست الف - بسط کسرها جزئی.....                               |
| ۶۵۶ | پیوست ب - خلاصه نکات.....                                     |
| ۶۷۰ | پیوست ج - جداول.....                                          |

## عناوین جلد دوم

فصل دهم: مباحث پیشرفته سیگنال‌ها و سیستم‌ها

فصل یازدهم: مباحث پیشرفته سیستم‌های LTI

فصل دوازدهم: مباحث پیشرفته تبدیل فوریه

فصل سیزدهم: مباحث پیشرفته سری فوریه

فصل چهاردهم: مباحث پیشرفته تبدیل لاپلاس و  $\mathcal{Z}$

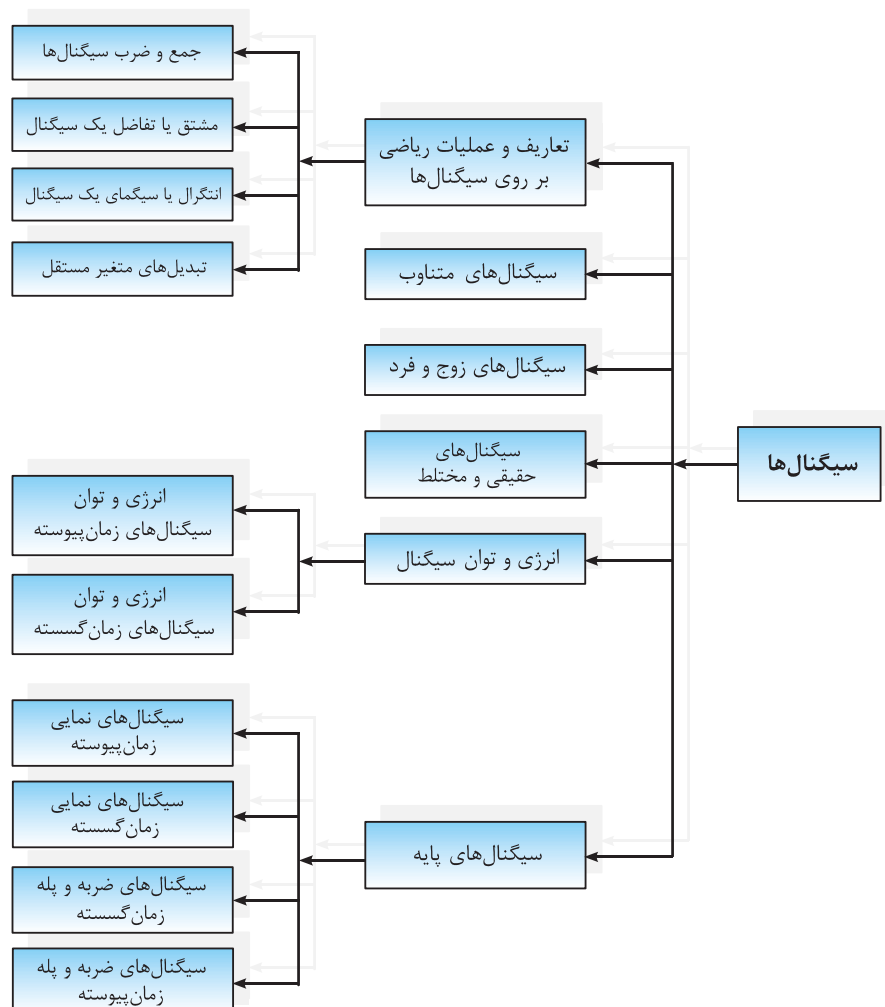
فصل پانزدهم: مباحث پیشرفته تحلیل سیستم‌های LTI در زمان و فرکانس

فصل شانزدهم: شناسایی سیستم‌ها و خواص آن‌ها

فصل هفدهم: مقدمه‌ای بر نمونه برداری

## فصل اول

### سیگنال‌ها

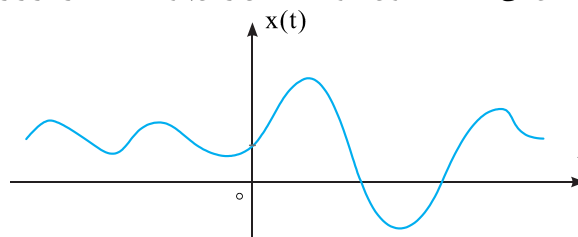


## مقدمه

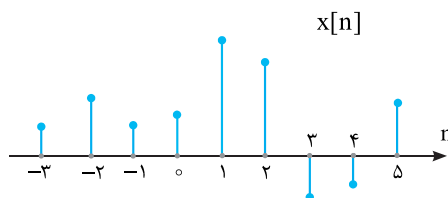
در این فصل به تعریف اجمالی سیگنال‌ها و مشخصات آن‌ها و همچنین به نحوه استفاده از آن‌ها به عنوان ابزاری مهم در مباحث پردازش سیگنال می‌پردازیم و تعدادی از سیگنال‌های مهم که در ادامه درس با آن‌ها سر و کار خواهیم داشت را معرفی می‌نماییم.<sup>۱</sup>

## تعاریف و عملیات ریاضی بر روی سیگنال‌ها

**تعریف سیگنال:** سیگنال از لحاظ ریاضی، تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است؛<sup>۲</sup> اما در کاربردهای عملی، طبیعتاً سیگنال‌هایی برای ما اهمیت دارند که حاوی اطلاعاتی از یک فرایند فیزیکی و یا حتی اقتصادی و اجتماعی باشند؛ مانند سیگنال‌های مخابراتی، سیگنال‌های صوتی و تصویری، سیگنال‌های تغییرات شاخص‌های بورس و ... . موضوع اصلی پردازش سیگنال، اعمال تغییرات مورد نظر بر روی سیگنال‌ها و احیاناً استخراج اطلاعات و مؤلفه‌های مورد نظر از آن می‌باشد که ما در این درس بیشتر به مبانی و مقدمات ریاضی این مباحث خواهیم پرداخت. سیگنال‌ها بسته به نوع متغیر مستقل خود در حالت کلی به دو دسته زمان پیوسته و زمان گسسته تقسیم می‌شوند: **سیگنال زمان پیوسته (C.T):** سیگنال زمان پیوسته، سیگنالی است که در همه زمان‌ها تعریف شده و دارای مقدار (هر چند صفر) می‌باشد. یعنی متغیر مستقل آن همه مقادیر حقیقی را به خود می‌گیرد. در این حالت معمولاً متغیر مستقل را با "t" نمایش می‌دهند. به عنوان نمونه، سیگنال زمان پیوسته  $x(t)$  را در زیر ملاحظه می‌کنید:



**سیگنال زمان گسسته (D.T):** سیگنال زمان گسسته، سیگنالی است که فقط در لحظاتی گسسته (صحیح) از زمان تعریف می‌شود. یعنی متغیر مستقل آن فقط مقادیر صحیح به خود می‌گیرد. در این حالت معمولاً متغیر مستقل را با "n" نمایش می‌دهند. به عنوان نمونه، سیگنال زمان گسسته  $x[n]$  را در شکل زیر ملاحظه می‌کنید. توجه داشته باشید که مقدار یک سیگنال زمان گسسته در حالت کلی هر چیزی می‌تواند باشد و تنها متغیر "n" لزوماً صحیح است.



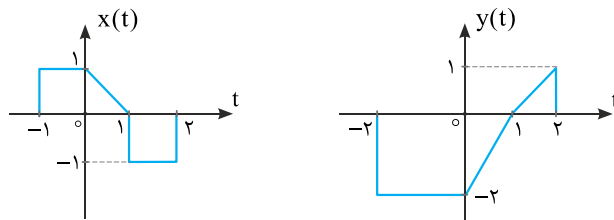
<sup>۱</sup> برای داشتن بازدهی حداکثری از مطالعه این کتاب، اکیداً توصیه می‌شود قبل از شروع، مقدمه کتاب را به‌طور دقیق بخوانید و با توجه به توضیحات داده شده، روش مناسب خود برای مطالعه این کتاب را انتخاب نمایید.

<sup>۲</sup> در این درس، متغیر مستقل ما معمولاً زمان است.

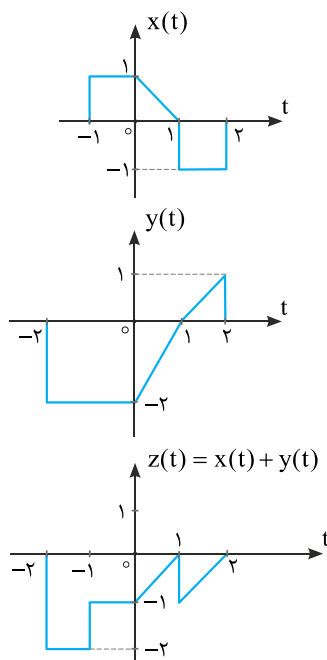
<sup>۳</sup> Continuous Time  
<sup>۴</sup> Discrete Time

## جمع و ضرب سیگنال‌ها

در بسیاری از مباحث این درس، نیاز است که شکل دو سیگنال را با هم جمع یا در هم ضرب نماییم. در این بخش، نحوه جمع و ضرب دو سیگنال را از روی شکل آن‌ها آموزش می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم دو سیگنال  $x(t)$  و  $y(t)$  که در شکل زیر نشان داده شده‌اند را با هم جمع نماییم:



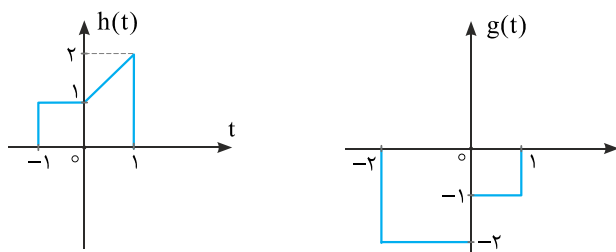
با فرض اینکه  $x(t) + y(t) = z(t)$  باشد، مشخص است که  $z(t)$  در هر لحظه  $t_0$  برابر  $x(t_0) + y(t_0)$  می‌باشد. یعنی برای حاصل جمع دو شکل کافی است که دامنه‌های<sup>۱</sup> (مقدارهای) آن‌ها را در هر لحظه، با هم جمع کنیم. بنابراین با رسم دو شکل  $x(t)$  و  $y(t)$  در زیر هم و جمع دامنه‌های آن‌ها شکل  $z(t) = x(t) + y(t)$  به دست می‌آید. در لحظات  $-2 < t < -1$  دامنه  $x(t)$  برابر صفر و دامنه  $y(t)$  برابر  $-2$  می‌باشد. بنابراین حاصل جمع آن‌ها برابر  $-2$  خواهد بود. در لحظات  $-1 < t < 0$  دامنه  $x(t)$  برابر  $1$  و دامنه  $y(t)$  برابر  $-2$  است. پس حاصل



جمع آن‌ها برابر  $-1$  می‌شود. در لحظات  $0 < t < 1$ ،  $x(t)$  و  $y(t)$  تابع خطی هستند. از آنجا که جمع دو خط، برابر خط می‌شود، برای جمع دو خط، کافی است که نقاط ابتدا و انتهای آن‌ها را با هم جمع کرده و سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل نماییم.  $x(t)$  و  $y(t)$  در لحظه  $t = 0$  به ترتیب برابر  $1$  و  $-2$  می‌باشند که حاصل جمع آن‌ها برابر  $-1$  می‌شود. از طرف دیگر  $x(t)$  و  $y(t)$  هر دو در لحظه  $t = 1$  برابر صفر و حاصل جمع آن‌ها نیز برابر صفر می‌شود. حال دو نقطه به دست آمده در لحظات  $t = 0, 1$  را به هم وصل می‌کنیم. در لحظات  $1 < t < 2$  دامنه  $x(t)$  برابر  $-1$  و  $y(t)$  برابر یک خط می‌باشد که جمع این دو نیز برابر همان خط می‌باشد که تنها یک واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است (در واقع نقاط ابتدا و انتهای خط با  $-1$  جمع می‌شوند). در بقیه لحظات نیز هر دو سیگنال برابر صفر می‌باشند و حاصل جمع آن‌ها نیز صفر خواهد بود. در نتیجه حاصل جمع دو سیگنال  $x(t)$  و  $y(t)$  برابر شکل  $z(t)$  می‌باشد.

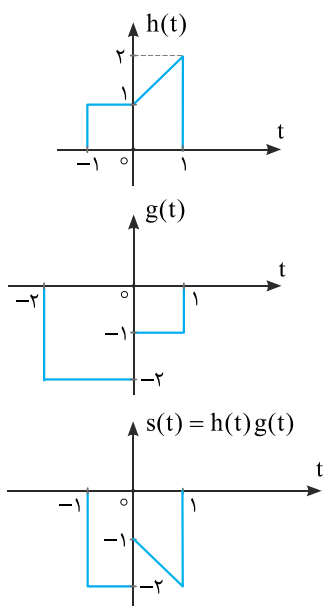
<sup>۱</sup> در این درس، منظور از «دامنه سیگنال»، «مقدار سیگنال» است.

حال فرض کنید می‌خواهیم ضرب دو سیگنال  $h(t)$  و  $g(t)$  که در شکل زیر نشان داده شده‌اند را حساب نماییم:

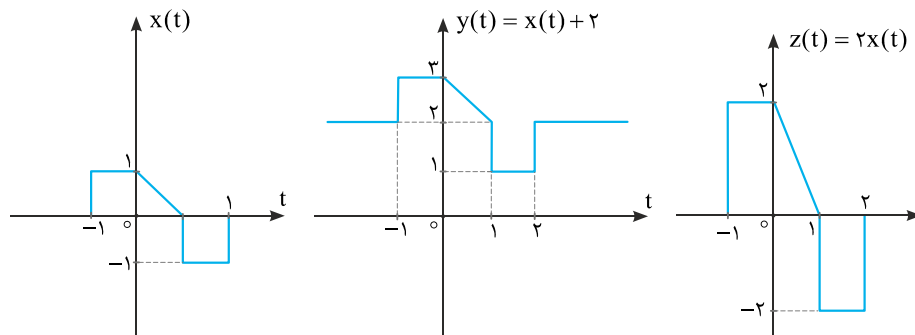


با فرض اینکه  $s(t) = h(t) \cdot g(t)$  باشد، مشخص است که  $s(t)$  در هر لحظه  $t_0$  برابر  $h(t_0) \cdot g(t_0)$  می‌باشد. یعنی برای حاصل ضرب دو شکل کافی است که دامنه‌های آن‌ها را در هر لحظه، در هم ضرب نماییم. بنابراین با رسم دو شکل  $h(t)$  و  $g(t)$  در زیر هم و ضرب دامنه‌های آن‌ها شکل  $s(t) = h(t) \cdot g(t)$  به‌دست می‌آید. در لحظات  $-2 < t < -1$  دامنه  $h(t)$  برابر صفر و دامنه  $g(t)$  برابر  $-2$  می‌باشد. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر صفر خواهد بود. در لحظات  $-1 < t < 0$  دامنه  $h(t)$  برابر  $1$  و دامنه  $g(t)$  برابر  $-2$  است. پس حاصل ضرب آن‌ها

برابر  $-2$  می‌شود. در لحظات  $0 < t < 1$ ،  $h(t)$  یک خط و  $g(t)$  برابر ثابت  $-1$  می‌باشد. ضرب خط در ثابت، برابر خط می‌شود. در نتیجه برای ضرب یک خط در یک ثابت، کافی است که نقاط ابتدا و انتهای خط را در آن مقدار ثابت ضرب کرده و سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل نماییم.  $h(t)$  و  $g(t)$  در لحظه  $t = 0$  به ترتیب برابر  $1$  و  $-1$  می‌باشند که حاصل ضرب آن‌ها برابر  $-1$  می‌شود. از طرف دیگر  $h(t)$  و  $g(t)$  در لحظه  $t = 1$  به ترتیب برابر  $2$  و  $-1$  می‌باشند که حاصل ضرب آن‌ها برابر  $-2$  می‌شود. حال دو نقطه به‌دست آمده در لحظات  $0, 1$  را به هم وصل می‌کنیم. در بقیه لحظات نیز هر دو سیگنال برابر صفر می‌باشند و حاصل ضرب آن‌ها نیز برابر صفر خواهد بود. در نتیجه حاصل ضرب دو سیگنال  $h(t)$  و  $g(t)$  برابر  $s(t)$  در شکل مقابل می‌باشد.



حال فرض کنید می‌خواهیم حاصل جمع یک سیگنال را با یک ثابت حساب کنیم. برای این کار کافی است که دامنه سیگنال را در همه لحظات با آن ثابت جمع نماییم.<sup>۱</sup> همچنین برای ضرب یک سیگنال در یک ثابت، کافی است که دامنه سیگنال را در همه لحظات در آن ثابت ضرب کنیم. به عنوان مثال در شکل زیر سیگنال  $x(t)$  و  $y(t) = x(t) + 2$  و همچنین  $z(t) = 2x(t)$  را ملاحظه می‌کنید:



### مشتق یا تفاضل یک سیگنال

در مباحث مختلف در این درس ممکن است به محاسبه مشتق یک سیگنال زمان‌پیوسته و یا محاسبه تفاضل یک سیگنال زمان‌گسسته از روی شکل آن‌ها برخورد کنیم. معمولاً این دو عبارت در حالت زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته معادل هم می‌باشند. منظور از  $x'(t)$ ، مشتق سیگنال  $x(t)$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x'(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta}$$

توجه داشته باشید از آنجا که  $\Delta \rightarrow 0$  هم شامل  $0^+$  می‌شود و هم شامل  $0^-$ ، دو تساوی فوق دقیقاً معادل هم هستند. مفهوم مشتق یک تابع به این معنی است که تغییرات تابع را در هر لحظه نسبت به تغییرات متغیر مستقل (که معمولاً زمان است) بررسی نماییم. در واقع  $\Delta$  در تعریف مشتق، کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان‌پیوسته می‌باشد. اگر بخواهیم معادل مفهوم فوق را در حالت زمان‌گسسته بیان کنیم، باید از تفاضل استفاده کنیم. تفاضل سیگنال زمان‌گسسته  $x[n]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

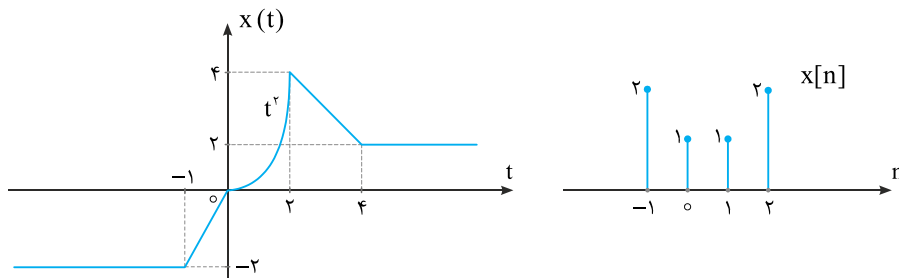
$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

عبارت فوق نیز مانند مشتق، تغییرات یک تابع زمان‌گسسته نسبت به تغییرات متغیر مستقل (که معمولاً زمان است) را نشان می‌دهد؛ اما چون کوچک‌ترین بازه و تغییرات زمانی ممکن در حالت زمان‌گسسته برابر ۱ واحد می‌باشد،  $\Delta = 1$  در نظر گرفته شده و فرمول مشتق به فرمول تفاضل تبدیل شده است. البته به‌طور دقیق‌تر به فرمول فوق، تفاضل پسرو گفته می‌شود که از فرمول تفاضل پیشرو که به صورت  $x[n+1] - x[n]$  تعریف می‌شود، متمایز گردد. ما در این درس معمولاً با تفاضل پسرو سر و کار داریم و هرگاه عبارت تفاضل یک سیگنال، به تنهایی به کار برده شد، منظور تفاضل پسرو می‌باشد.

<sup>۱</sup> در واقع در اینجا منظور از ثابت، سیگنال ثابت است.

## مثال ۱

سیگنال  $x(t)$  و  $x[n]$  در شکل زیر نشان داده شده‌اند.

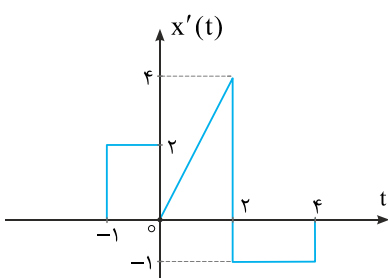


الف) مقدار  $x'(t)$  در  $t = 3$  و  $t = 1$  را محاسبه و همچنین شکل  $x'(t)$  را به‌طور کامل رسم نمایید.

ب) مقدار  $\nabla x[n]$  در  $n = 0$  و  $n = 1$  را محاسبه و همچنین شکل  $\nabla x[n]$  را به‌طور کامل رسم نمایید.

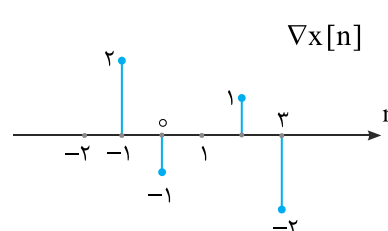
حل:

الف) سیگنال  $x(t)$  در بازه  $t < -1$  دارای مقداری ثابت می‌باشد، پس مشتق آن در این بازه برابر صفر خواهد بود. در بازه  $-1 < t < 0$  یک خط با شیب ۲ داریم، پس مشتق آن در این بازه برابر ثابت ۲ خواهد بود. در بازه



$0 < t < 2$  یک سهمی با فرمول  $t^2$  داریم، پس مشتق آن در این بازه برابر تابع  $2t$  خواهد بود که در لحظه  $t = 1$  برابر ۲ می‌باشد. در بازه  $2 < t < 4$  یک خط با شیب  $-1$  داریم، پس مشتق آن در این بازه برابر ثابت  $-1$  خواهد بود و در نتیجه در لحظه  $t = 3$  هم برابر همان  $-1$  می‌باشد. در بازه  $t > 4$   $x(t)$  دارای مقداری ثابت می‌باشد، پس مشتق آن در این بازه برابر صفر خواهد بود. بنابراین شکل  $x'(t)$  به‌صورت مقابل می‌باشد.

ب) برای تعیین  $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$ ، باید مقدار  $x[n]$  را در هر لحظه، منهای مقدار آن در لحظه قبلی نماییم.  $\nabla x[n]$  در لحظات  $n \leq -2$  برابر صفر می‌شود، زیرا  $x[n]$  و  $x[n-1]$  در این لحظات برابر صفر هستند.  $x[n]$  در لحظه  $n = -1$  دارای مقدار ۲ و در لحظه  $n = -2$  دارای مقدار صفر است، پس  $\nabla x[n]$  در لحظه  $n = -1$  برابر  $\nabla x[-1] = x[-1] - x[-2] = 2 - 0 = 2$  می‌شود.  $x[n]$  در لحظه  $n = 0$  دارای مقدار ۱ و در لحظه  $n = -1$  دارای مقدار ۲ است، پس  $\nabla x[n]$  در لحظه  $n = 0$  برابر  $\nabla x[0] = x[0] - x[-1] = 1 - 2 = -1$  می‌شود.  $x[n]$  در لحظه  $n = 1$  دارای مقدار ۱ و در لحظه  $n = 0$  دارای مقدار ۱ است، پس  $\nabla x[n]$  در لحظه  $n = 1$  برابر  $\nabla x[1] = x[1] - x[0] = 1 - 1 = 0$  می‌شود.  $x[n]$  در لحظه  $n = 2$  دارای مقدار ۲ و در لحظه  $n = 1$  دارای مقدار ۱ است، پس  $\nabla x[n]$  در لحظه  $n = 2$  برابر  $\nabla x[2] = x[2] - x[1] = 2 - 1 = 1$  می‌شود.  $x[n]$  در لحظه  $n = 3$  دارای مقدار صفر و در لحظه  $n = 2$  دارای مقدار ۲ است، پس



$\nabla x[n]$  در لحظه  $n = 3$  برابر  $\nabla x[3] = x[3] - x[2] = 0 - 2 = -2$  می‌شود. از آنجا که  $x[n]$  در لحظات  $n \geq 3$  دارای مقدار ثابت و یکسانی (در اینجا صفر) است، پس  $x[n]$  و  $x[n-1]$  به‌ازای  $n \geq 4$  دارای مقدار یکسانی خواهند بود و در نتیجه مقدار  $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$  به‌ازای  $n \geq 4$  برابر صفر به‌دست می‌آید. بنابراین شکل  $\nabla x[n]$  به‌صورت مقابل می‌باشد.

### انتگرال (مساحت) یا سیگمای (مجموع) یک سیگنال

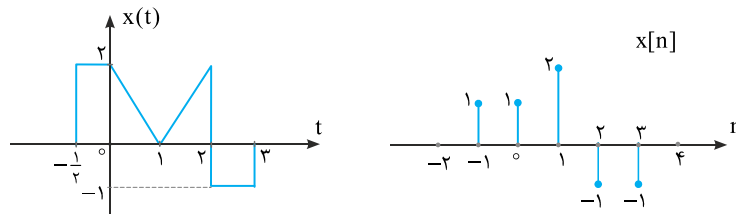
در مباحث مختلف در این درس ممکن است به انتگرال‌های معین نظیر  $\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$  یا سیگماهای معین نظیر  $\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$  برخورد کنیم. منظور از  $\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$  مساحت زیر نمودار سیگنال  $x(t)$  از لحظه  $t = t_1$  تا لحظه  $t = t_2$  می‌باشد. همچنین به‌طور معادل منظور از  $\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$  مجموع مقادیر  $x[n]$  از لحظه  $n_1$  تا  $n_2$  می‌باشد. یعنی داریم:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] = \begin{cases} x[n_1] + x[n_1+1] + x[n_1+2] + \dots + x[n_2] & , n_2 \geq n_1 \\ x[n_2] + x[n_2+1] + x[n_2+2] + \dots + x[n_1] & , n_1 \geq n_2 \end{cases}$$

معمولاً دو عبارت  $\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$  و  $\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$  در حالت زمان پیوسته و زمان گسسته معادل هم می‌باشند.<sup>۱</sup> گاهی اوقات حدود انتگرال (یا سیگما) اعداد ثابتی نیستند و تابعی از  $t$  (یا  $n$ ) می‌باشند؛ در این صورت حاصل انتگرال یا سیگما نیز تابعی از  $t$  (یا  $n$ ) خواهد بود. نحوه محاسبه این نوع انتگرال‌ها (یا سیگماها) با استفاده از رسم شکل اهمیت زیادی دارد و در مثال بعد توضیح داده خواهد شد.

### مثال ۲

سیگنال زمان پیوسته  $x(t)$  و سیگنال زمان گسسته  $x[n]$  در شکل زیر مفروضند. حاصل انتگرال‌ها و سیگماهای داده شده را به دست آورید.



<sup>۱</sup> عبارت  $\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$  که به معنای مساحت زیر نمودار سیگنال  $x(t)$  از لحظه  $t_1$  تا  $t_2$  می‌باشد، در واقع مقدار سیگنال  $x(t)$  را در هر لحظه  $t$  در  $dt$  (کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان پیوسته) ضرب می‌کند و این کار را به‌ازای همه  $t$  ها از  $t_1$  تا  $t_2$  انجام می‌دهد و سپس همه عبارات به‌دست آمده را با هم جمع می‌نماید. در نتیجه این انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر با یک سیگما تقریب زد:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \approx \sum_i x(t_i) \Delta$$

که  $t_i$  ها شامل همه لحظات  $t$  در بازه  $t_1$  تا  $t_2$  می‌شود که با فاصله  $\Delta \rightarrow 0$  از هم قرار دارند. حال اگر بخواهیم عبارت فوق را در حالت زمان گسسته معادل‌سازی کنیم، باید  $\Delta = 1$  در نظر بگیریم، زیرا کوچکترین بازه زمانی ممکن در حالت زمان گسسته، ۱ می‌باشد. بنابراین معادل انتگرال فوق در حالت زمان گسسته به‌صورت  $\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$  خواهد بود که  $n$  شامل همه لحظات در بازه  $n_1$  تا  $n_2$  می‌شود که با فاصله  $\Delta = 1$  از هم قرار دارند.

**الف)** حاصل انتگرال‌های  $A = \int_0^3 x(t) dt$  و  $B = \int_1^{-2} x(t) dt$  را محاسبه کنید.

**ب)** حاصل سیگماهای  $C = \sum_{n=-1}^2 x[n]$  و  $D = \sum_{n=3}^{-2} x[n]$  را محاسبه نمایید.

**ج)** اگر  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  باشد،  $y[n]$  را محاسبه و رسم کنید.

**د)** اگر  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$  باشد،  $y(t)$  را محاسبه و رسم نمایید.

**حل:**

**الف)** برای محاسبه انتگرال  $A$  باید مساحت سیگنال  $x(t)$  را از لحظه  $t = 0$  تا لحظه  $t = 3$  حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$A = \int_0^3 x(t) dt = \frac{2 \times 1}{2} + \frac{2 \times 1}{2} - (1 \times 1) = 1$$

دقت کنید که مساحت شکلی زیر محور افقی، منفی است.

برای محاسبه انتگرال  $B$  باید مساحت سیگنال  $x(t)$  را از لحظه  $t = 1$  تا لحظه  $t = -2$  حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$B = \int_1^{-2} x(t) dt = -\left(\frac{2 \times 1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}\right) = -2$$

دقت کنید با توجه به اینکه حد بالایی انتگرال از حد پایینی کوچکتر است، مساحت شکل را باید از راست به چپ حساب کنیم که به همین دلیل در یک منفی نیز ضرب می‌شود.<sup>۱</sup> وجود این منفی را می‌توان با جابه‌جایی حدود انتگرال نیز نشان داد. یعنی داریم:

$$B = \int_1^{-2} x(t) dt = -\int_{-2}^1 x(t) dt = -\left(\frac{2 \times 1}{2} + (2 \times \frac{1}{2})\right) = -2$$

**ب)** برای محاسبه سیگمای  $C$  باید مجموع مقادیر  $x[n]$  را از لحظه  $n = -1$  تا لحظه  $n = 2$  حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$C = \sum_{n=-1}^2 x[n] = 1 + 1 + 2 - 1 = 3$$

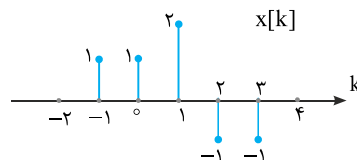
برای محاسبه سیگمای  $D$  باید مجموع مقادیر  $x[n]$  را از لحظه  $n = 3$  تا لحظه  $n = -2$  حساب کنیم که با توجه به شکل داده شده، برابر است با:

$$D = \sum_{n=3}^{-2} x[n] = -1 - 1 + 2 + 1 + 1 + 0 = 2$$

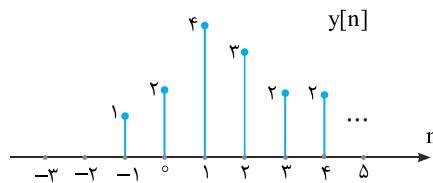
دقت کنید که در سیگما، چه از راست به چپ و چه از چپ به راست مجموع مقادیر سیگنال را حساب نماییم، تفاوتی نمی‌کند و بر خلاف انتگرال، در اینجا نیازی به ضرب منفی نیست. در واقع در سیگما، می‌توان حدود را جابه‌جا کرد بدون اینکه حاصل سیگما در یک منفی ضرب شود.

<sup>۱</sup> در واقع مقدار مساحت هر شکل، از راست به چپ، برابر منفی مساحت آن از چپ به راست است.

ج) برای محاسبه  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  باید مجموع مقادیر  $x[k]$  از  $k = -\infty$  تا  $k = n$  را به‌ازای  $n$  های مختلف حساب کنیم. برای این کار ابتدا باید شکل  $x[k]$  را رسم نماییم<sup>۱</sup>:



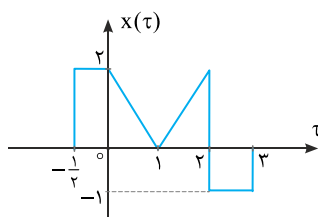
مثلاً برای محاسبه  $y[n]$  در لحظه  $n = 1$ ، باید مقدار  $y[1] = \sum_{k=-\infty}^1 x[k]$  یعنی مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  را از  $k = -\infty$  تا  $k = 1$  حساب کنیم که با توجه به شکل فوق برابر ۴ می‌شود. یا برای محاسبه  $y[n]$  در لحظه  $n = 2$ ، باید مقدار  $y[2] = \sum_{k=-\infty}^2 x[k]$  یعنی مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  را از  $k = -\infty$  تا  $k = 2$  حساب نماییم که برابر ۳ می‌شود؛ و به همین ترتیب برای محاسبه  $y[n]$  در لحظه  $n = n_0$ ، باید مقدار  $y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x[k]$  یعنی مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  را از  $k = -\infty$  تا  $k = n_0$  حساب کنیم و سپس شکل  $y[n]$  را به‌ازای  $n$  های مختلف رسم نماییم.  $y[n]$  به‌ازای  $n \leq -2$  برابر صفر می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  از  $k = -\infty$  تا  $k = -2$  برابر صفر است.  $y[n]$  به‌ازای  $n = -1$  برابر ۱ می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  از  $k = -\infty$  تا  $k = -1$  برابر ۱ است.  $y[n]$  به‌ازای  $n = 0$  برابر ۲ می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  از  $k = -\infty$  تا  $k = 0$  برابر ۲ است.  $y[n]$  به‌ازای  $n = 1, 2$  نیز به ترتیب برابر ۴ و ۳ می‌شود؛ و در آخر،  $y[n]$  به‌ازای  $n \geq 3$  برابر ۲ می‌شود، زیرا مجموع مقادیر شکل  $x[k]$  از  $k = -\infty$  تا  $k = 3$  برابر ۲ است. حال شکل  $y[n]$  را به‌ازای  $n$  های مختلف رسم می‌کنیم:



البته ما در اینجا  $y[n]$  را با توضیحات مفصل و قدم به قدم محاسبه کردیم، اما شما باید سعی کنید این محاسبات را به‌صورت ذهنی انجام دهید.

<sup>۱</sup> دقت کنید که حاصل سیگما در اینجا تابعی از  $n$  است. در واقع  $k$  متغیر داخلی سیگماست و بعد از محاسبه سیگما، حذف می‌شود و  $n$  متغیر بیرونی سیگماست که بعد از محاسبه سیگما باقی می‌ماند.

۵) برای محاسبه  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$  باید مساحت  $x(\tau)$  را از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = t$  را به‌ازای  $t$  های مختلف حساب کنیم. برای این کار ابتدا باید شکل  $x(\tau)$  را رسم نماییم:<sup>۱</sup>



مثلاً برای محاسبه  $y(t)$  در لحظه  $t = 1$ ، باید مقدار  $y(1) = \int_{-\infty}^1 x(\tau) d\tau$  یعنی مساحت شکل  $x(\tau)$  را از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = 1$  حساب کنیم که با توجه به شکل فوق برابر ۲ می‌شود؛ یا برای محاسبه  $y(t)$  در لحظه  $t = 2$ ،

باید مقدار  $y(2) = \int_{-\infty}^2 x(\tau) d\tau$  یعنی مساحت شکل  $x(\tau)$  را از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = 2$  حساب نماییم که برابر ۳

می‌شود؛ و به همین ترتیب برای محاسبه  $y(t)$  در لحظه  $t = t_0$ ، باید مقدار  $y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) d\tau$  یعنی مساحت شکل  $x(\tau)$  را از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = t_0$  حساب کنیم و سپس شکل  $y(t)$  را به‌ازای  $t$  های مختلف رسم نماییم.

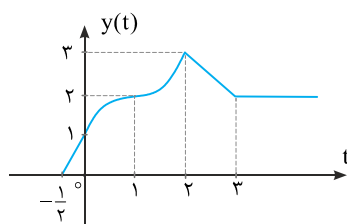
$y(t)$  به‌ازای  $t < -\frac{1}{2}$  برابر صفر می‌شود، زیرا مساحت شکل  $x(\tau)$  از  $\tau = -\infty$  تا  $-\frac{1}{2}$  برابر صفر است. با افزایش  $t$  از  $-\frac{1}{2}$  تا ۰، مساحت شکل فوق از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = t$  به‌صورت خطی زیاد می‌شود، پس  $y(t)$  به‌صورت

خطی افزایش می‌یابد (زیرا در  $x(\tau)$  یک ثابت مثبت داریم و انتگرال ثابت مثبت برابر خط با شیب مثبت می‌شود).

$y(t)$  به‌ازای  $t = 0$  برابر مساحت شکل  $x(\tau)$  از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = 0$  می‌باشد که برابر ۱ خواهد بود. با افزایش  $t$  از ۰ تا ۱، مقدار  $y(t)$  (مساحت شکل فوق از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = t$ ) به‌صورت یک سهمی با تقارن رو به پایین

افزایش می‌یابد (زیرا در  $x(\tau)$  یک خط با شیب منفی داریم و انتگرال خط با شیب منفی، یک سهمی با تقارن رو به پایین می‌باشد).<sup>۲</sup>  $y(t)$  به‌ازای  $t = 1$  نیز برابر ۲ می‌شود. با افزایش  $t$  از ۱ تا ۲، مقدار  $y(t)$  به‌صورت یک سهمی

با تقارن رو به بالا افزایش می‌یابد (زیرا در  $x(\tau)$  یک خط با شیب مثبت داریم و انتگرال خط با شیب مثبت، یک سهمی با تقارن رو به بالا می‌باشد).<sup>۳</sup>  $y(t)$  به‌ازای  $t = 2$  نیز برابر ۳ می‌شود. با افزایش  $t$  از ۲ تا ۳، مساحت



شکل فوق از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau = t$  به‌صورت خطی کم می‌شود،

پس  $y(t)$  به‌صورت خطی کاهش می‌یابد، (زیرا در  $x(\tau)$  یک

ثابت منفی داریم و انتگرال ثابت منفی برابر خط با شیب منفی

می‌شود).  $y(t)$  به‌ازای  $t > 3$  نیز برابر ثابت ۲ می‌شود، زیرا

مساحت شکل  $x(\tau)$  از  $\tau = -\infty$  تا  $\tau > 3$  برابر ۲ است. حال

شکل  $y(t)$  را به‌ازای  $t$  های مختلف رسم می‌کنیم.

<sup>۱</sup> دقت کنید که حاصل انتگرال در اینجا تابعی از  $t$  است. در واقع  $\tau$  متغیر داخلی انتگرال است و بعد از محاسبه انتگرال، حذف می‌شود و  $t$  متغیر بیرونی انتگرال است که بعد از محاسبه انتگرال باقی می‌ماند.

<sup>۲</sup> دلیل دیگری که می‌توان برای این موضوع ذکر کرد این است که چون خط به سمت پایین است، سرعت زیاد شدن مساحت، در حال کم شدن است و بنابراین جهت تقعر به سمت پایین خواهد بود.

<sup>۳</sup> دلیل دیگری که می‌توان برای این موضوع ذکر کرد این است که چون خط به سمت بالا است، سرعت زیاد شدن مساحت، در حال زیاد شدن است و بنابراین جهت تقعر به سمت بالا خواهد بود.

در بسیاری از بخش‌های این درس، با عملیاتی به نام تغییر متغیر انتگرال معین روبه‌رو می‌شویم که بسیاری از دانشجویان در این زمینه مشکل دارند. توصیه می‌شود مثال زیر را با دقت مطالعه و همواره از همین روش برای بازنویسی انتگرال بعد از تغییر متغیر، استفاده نمایید.

### مثال ۳

انتگرال  $I = \int_{-\infty}^{t+3} x(-2\tau+1) d\tau$  را با اعمال تغییر متغیر  $\alpha = -2\tau+1$  ساده نمایید.

حل:

با فرض  $\alpha = -2\tau+1$  و دیفرانسیل‌گیری از دو طرف تساوی داریم:

$$-2\tau+1=\alpha \Rightarrow -2d\tau=d\alpha \Rightarrow d\tau=-\frac{1}{2}d\alpha$$

حال باید تغییر متغیر را در حدود انتگرال نیز اعمال نماییم. حدود انتگرال برای متغیر  $\tau$  بیان شده است و ما باید حدود جدید را برای متغیر  $\alpha = -2\tau+1$  به‌دست آوریم. برای این کار، یک‌بار در تساوی  $\alpha = -2\tau+1$  به جای  $\tau$ ، حد پایین انتگرال را قرار می‌دهیم که  $\alpha = -2(-\infty)+1 = +\infty$  می‌شود و بار دیگر به جای  $\tau$ ، حد بالای انتگرال را جایگذاری می‌کنیم که  $\alpha = -2(t+3)+1 = -2t-5$  خواهد شد. بنابراین داریم:

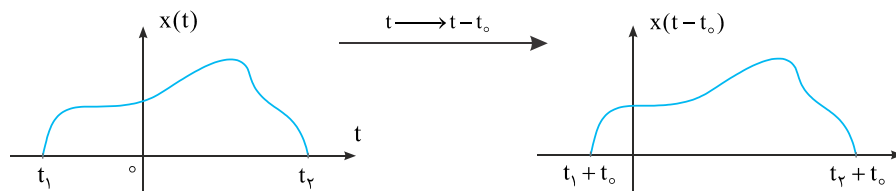
$$I = \int_{-\infty}^{t+3} x(-2\tau+1) d\tau = \int_{+\infty}^{-2t-5} x(\alpha) \left(-\frac{1}{2}d\alpha\right) = \frac{1}{2} \int_{-2t-5}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha$$

دقت کنید که ضریب منفی را با جابه‌جایی حدود، خنثی کردیم.

### تبدیل‌های متغیر مستقل

منظور از تبدیل‌های متغیر مستقل، تبدیل‌هایی است که بر متغیر مستقل  $t$  (یا  $n$ ) اعمال می‌شود. ما در اینجا سه نوع تبدیل پایه (انتقال زمانی، وارونگی زمانی و مقیاس‌دهی زمانی) که در این درس به وفور با آن‌ها سر و کار خواهیم داشت را معرفی می‌نماییم. دقت کنید که این تبدیل‌ها صرفاً روی متغیر مستقل  $t$  اعمال می‌شوند نه آرگومان سیگنال.<sup>۱</sup>

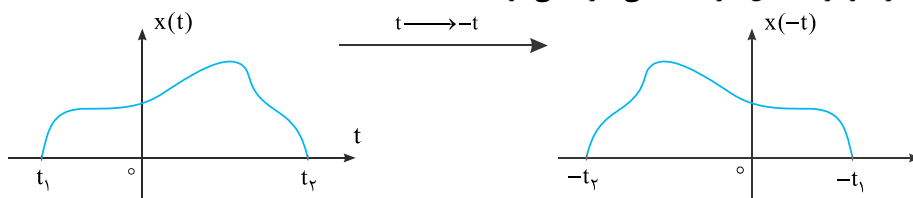
**انتقال زمانی:** اگر در یک سیگنال زمان‌پیوسته، متغیر مستقل " $t$ " را به " $t-t_0$ " تبدیل کنیم، سیگنال به اندازه  $t_0$  روی محور زمان جابجا می‌شود. اگر  $t_0 > 0$  باشد سیگنال به سمت راست و اگر  $t_0 < 0$  باشد سیگنال به سمت چپ انتقال می‌یابد. به عبارت دیگر در این تبدیل، همه مقیاس‌های زمانی در نمودار سیگنال، با  $t_0$  جمع می‌شوند:



از روی شکل مشخص است که اگر  $t_0 > 0$  باشد، سیگنال به سمت راست و اگر  $t_0 < 0$  باشد، سیگنال به سمت چپ انتقال پیدا خواهد کرد. در حالت زمان‌گسسته نیز عبارات مشابهی وجود دارد.

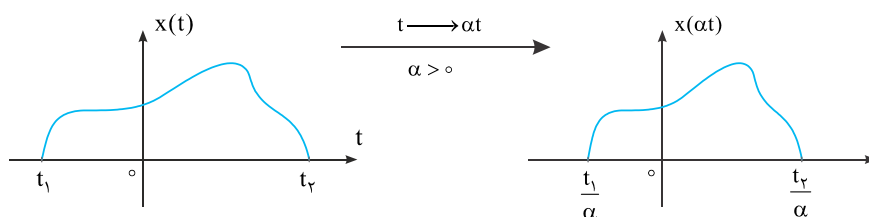
<sup>۱</sup> منظور از آرگومان سیگنال، عبارتی است که داخل پرانتز قرار می‌گیرد. مثلاً سیگنال  $x(2t+1)$  را در نظر بگیرید. آرگومان این سیگنال برابر  $2t+1$  می‌باشد، اما متغیر مستقل آن همان  $t$  است.

**وارونگی زمانی (معکوس شدن در زمان):** اگر در یک سیگنال زمان پیوسته، متغیر مستقل " $t$ " را به " $-t$ " تبدیل کنیم، سیگنال نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود. به عبارت دیگر در این تبدیل، همه مقیاس‌های زمانی در نمودار سیگنال، در یک منفی ضرب می‌شوند:



در حالت زمان گسسته نیز عبارات مشابهی وجود دارد.

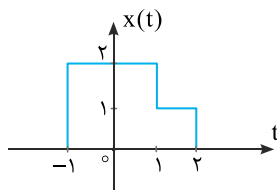
**مقیاس‌دهی زمانی:** اگر در یک سیگنال زمان پیوسته، متغیر مستقل " $t$ " را به " $\alpha t$ " ( $\alpha > 0$ ) تبدیل کنیم، سیگنال (به ازای  $\alpha > 1$ ) فشرده و (به ازای  $0 < \alpha < 1$ ) گسترده می‌شود. به عبارت دیگر در این تبدیل، همه مقیاس‌های زمانی در نمودار سیگنال، بر  $\alpha$  تقسیم می‌شوند.



از روی شکل مشخص است که اگر  $\alpha > 1$  باشد، سیگنال فشرده و اگر  $0 < \alpha < 1$  باشد، سیگنال گسترده خواهد شد. مقیاس‌دهی زمانی در حالت زمان گسسته، کمی متفاوت است و در قسمت بعد به آن اشاره خواهد شد.

#### مثال ۴

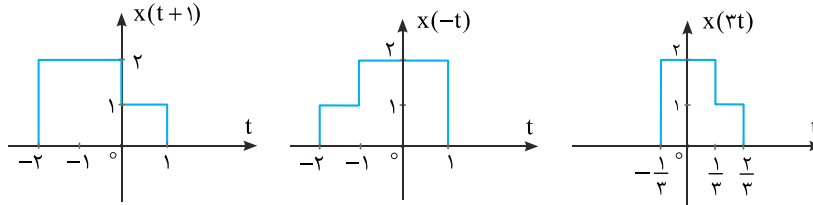
سیگنال  $x(t)$  در شکل مقابل نشان داده شده است.



**الف)** سیگنال‌های  $x(t+1)$ ،  $x(-t)$  و  $x(3t)$  را رسم کنید.  
**ب)** سیگنال  $x(-2t-1)$  را رسم نمایید.

**حل:**

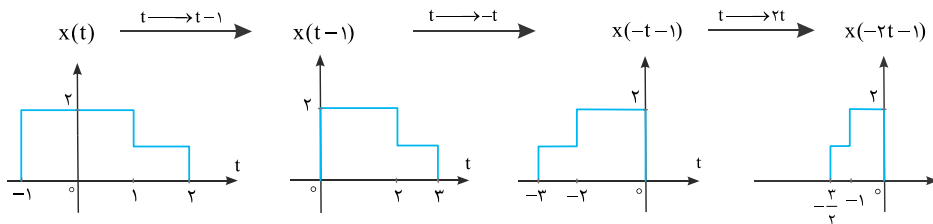
**الف)** برای تبدیل  $x(t)$  به  $x(t+1)$  باید  $t$  را به  $t+1 = t - (-1)$  تبدیل کنیم ( $t_0 = -1$ ). یعنی باید سیگنال را ۱ واحد به چپ انتقال دهیم؛ یا به عبارت دیگر باید همه مقیاس‌های زمانی روی نمودار سیگنال را با  $t_0 = -1$  جمع نماییم. برای تبدیل  $x(t)$  به  $x(-t)$  باید  $t$  را به  $-t$  تبدیل کنیم. یعنی باید سیگنال را نسبت به محور عمودی قرینه نماییم. برای تبدیل  $x(t)$  به  $x(3t)$  باید  $t$  را به  $3t$  تبدیل کنیم. یعنی باید سیگنال را با ضریب ۳ فشرده نماییم؛ یا به عبارت دیگر باید همه مقیاس‌های زمانی روی نمودار سیگنال را بر ۳ تقسیم کنیم.



ب) برای تبدیل  $x(t)$  به  $x(-2t-1)$  باید هر سه تبدیل متغیر مستقل را استفاده نماییم. ابتدا انتقال زمانی، سپس معکوس شدن در زمان و در آخر مقیاس‌دهی زمانی را اعمال می‌کنیم. توجه نمایید که در هر مرحله، تنها با متغیر  $t$  سر و کار داریم و فقط تبدیل‌های اعمال‌شده روی آن را در نظر می‌گیریم نه روی آرگومان؛ زیرا متغیر مستقل ما همواره  $t$  می‌باشد. بنابراین به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t-1} x(t-1) \xrightarrow{t \rightarrow -t} x(-t-1) \xrightarrow{t \rightarrow 2t} x(-2t-1)$$

در هر مرحله فوق، با توجه به تبدیل اعمال‌شده روی متغیر  $t$ ، تغییرات معادل را روی شکل لحاظ می‌کنیم. ابتدا انتقال شکل به اندازه ۱ واحد به سمت راست ( $t \rightarrow t-1$ )، سپس قرینه کردن شکل نسبت به محور عمودی ( $t \rightarrow -t$ ) و سرانجام فشرده کردن شکل با ضریب ۲ ( $t \rightarrow 2t$ ). انجام این مراحل را به صورت شکلی در ادامه ملاحظه می‌کنید:



روش دوم برای تبدیل  $x(t)$  به  $x(-2t-1)$ ، انجام مراحل زیر می‌باشد:

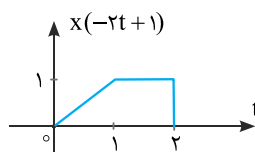
$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 2t} x(2t) \xrightarrow{t \rightarrow -t} x(-2t) \xrightarrow{t \rightarrow t + \frac{1}{2}} x(-2(t + \frac{1}{2})) = x(-2t-1)$$

یعنی ابتدا مقیاس‌دهی زمانی، سپس وارونگی زمانی و در آخر انتقال زمانی را اعمال می‌کنیم. بنابراین ابتدا فشرده کردن شکل با ضریب ۲ ( $t \rightarrow 2t$ )، سپس قرینه کردن شکل نسبت به محور عمودی ( $t \rightarrow -t$ ) و سرانجام انتقال شکل به اندازه  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت چپ ( $t \rightarrow t + \frac{1}{2}$ ). نتیجه در این حالت نیز دقیقاً مانند حالت قبل می‌باشد.

**تذکر:** توصیه می‌شود در این نوع سؤالات، همیشه از روش اول استفاده نمایید؛ یعنی ابتدا انتقال زمانی را اعمال کنید. زیرا معمولاً این روش از لحاظ محاسباتی ساده‌تر است.

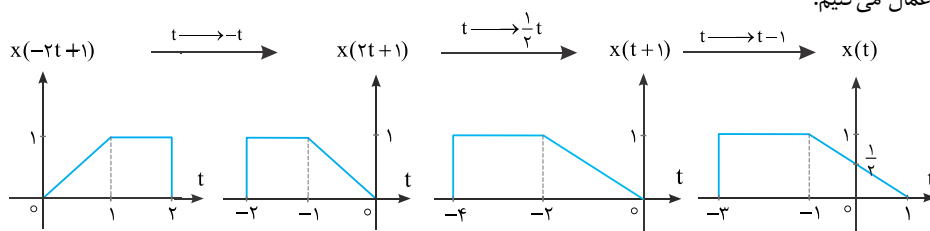
## مثال ۵

سیگنال  $x(-2t+1)$  نشان داده شده است. سیگنال  $x(t)$  را به دست آورید.



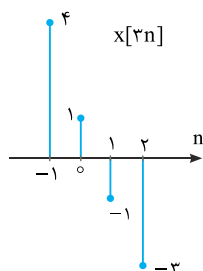
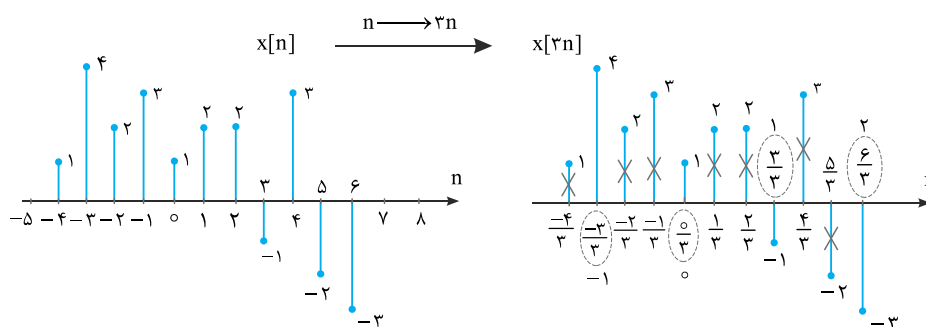
## حل:

بدیهی است که در اینجا از لحاظ محاسباتی بهتر است برعکس مثال قبل عمل نماییم؛ یعنی انتقال زمانی را در آخر اعمال می‌کنیم.



## مقیاس‌دهی زمانی در حالت زمان گسسته

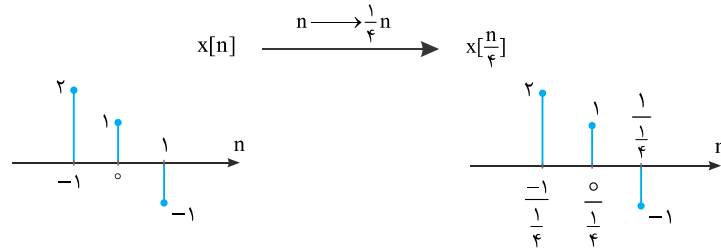
مقیاس‌دهی زمانی در حالت زمان گسسته در کلیت موضوع تفاوتی با حالت زمان پیوسته نمی‌کند، ولی به دلیل ویژگی‌های خاص سیگنال‌های زمان گسسته، تفاوت‌هایی جزئی وجود دارد. فشردگی سیگنال در حالت زمان گسسته، ممکن است باعث حذف بعضی از مقادیر سیگنال شود؛ گستردگی سیگنال نیز باعث به وجود آمدن مقادیر صفر در بین نمونه‌های سیگنال می‌گردد. مثلاً فرض کنید در سیگنال  $x[n]$  در شکل زیر، به جای متغیر  $n$ ،  $3n$  قرار دهیم. در این صورت مانند حالت زمان پیوسته همه مقیاس‌های زمانی بر 3 تقسیم می‌شوند. پس شکل سیگنال  $y[n] = x[3n]$  به صورت زیر به دست می‌آید:



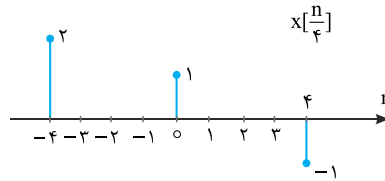
ملاحظه می‌کنید که سیگنال با ضریب 3 فشرده می‌شود. در این حالت بعضی از مقادیر سیگنال حذف می‌شوند، زیرا سیگنال زمان گسسته فقط در زمان‌های صحیح می‌تواند مقدار داشته باشد و مقادیری که در زمان‌های غیر صحیح قرار می‌گیرند خود به خود از بین می‌روند. مثلاً در این مثال، فقط مقادیری از  $x[n]$  که در زمان‌های مضرب 3 قرار داشتند ( $\dots$  و  $x[-3]$ ،  $x[0]$ ،  $x[3]$  و  $x[6]$  و  $\dots$ ) باقی ماندند و بقیه مقادیر حذف شدند. بنابراین شکل مرتب‌شده سیگنال  $y[n] = x[3n]$  به صورت مقابل خواهد بود.

پس در حالت کلی اگر در سیگنال  $x[n]$  به جای متغیر  $n$ ،  $mn$  قرار دهیم (با فرض  $m$  عددی طبیعی)، همه مقیاس‌های زمانی روی نمودار سیگنال بر  $m$  تقسیم می‌شوند و بنابراین فقط مقادیری از  $x[n]$  که در زمان‌های مضرب  $m$  قرار داشته باشند، در سیگنال  $y[n] = x[mn]$  باقی می‌مانند و بقیه مقادیر حذف خواهند شد.

حال در سیگنال  $x[n]$  در شکل زیر به جای متغیر  $n$ ،  $\frac{1}{4}n$  قرار می‌دهیم. در این صورت همه مقیاس‌های زمانی بر  $\frac{1}{4}$  تقسیم یا به عبارت بهتر در ۴ ضرب می‌شوند. پس شکل سیگنال  $y[n] = x[\frac{n}{4}]$  به صورت زیر به دست می‌آید:



ملاحظه می‌کنید که سیگنال با ضریب ۴ گسترده می‌شود. در این حالت بین نمونه‌های سیگنال مقادیر صفر ایجاد می‌شود، زیرا جایگزینی برای آن وجود ندارد و سیگنال حاصل ( $y[n] = x[\frac{n}{4}]$ ) در غیر مضارب ۴، حتماً صفر خواهد بود. در نتیجه شکل مرتب‌شده سیگنال  $y[n] = x[\frac{n}{4}]$  به صورت زیر می‌باشد:



پس در حالت کلی اگر در سیگنال  $x[n]$  به جای متغیر  $n$ ،  $\frac{1}{m}n$  قرار دهیم (با فرض  $m$  عددی طبیعی)، همه مقیاس‌های زمانی بر  $\frac{1}{m}$  تقسیم یا به عبارت بهتر در  $m$  ضرب می‌شوند و بنابراین سیگنال با ضریب  $m$  گسترده خواهد شد. در این حالت بین نمونه‌های سیگنال مقادیر صفر ایجاد می‌شود و سیگنال حاصل ( $y[n] = x[\frac{n}{m}]$ ) در غیر مضارب  $m$ ، قطعاً برابر صفر خواهد بود. به همین دلیل معمولاً گسترده‌گی سیگنال  $x[n]$  با ضریب  $m$  را (به جای  $y[n] = x[\frac{n}{m}]$ ) به صورت زیر تعریف می‌کنند که دقیقاً همان نتیجه را می‌دهد و از لحاظ ریاضی دقیق‌تر است:

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & , \text{ m مضرب n} \\ 0 & , \text{ o.w} \end{cases}$$

"o.w" مخفف "otherwise" به معنی «در غیر این صورت» می‌باشد.

مثلاً سیگنال  $x[n]$  در دو شکل قبل را در نظر بگیرید. در این صورت سیگنال  $y[n] = x_{(4)}[n]$ ، سیگنال

گسترده شده  $x[n]$  با ضریب ۴ می‌باشد که دقیقاً مطابق شکل  $y[n] = x[\frac{n}{4}]$  خواهد بود.<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> فشردگی و گسترده‌گی با ضریب  $m$  را گاهی اوقات به ترتیب به نماد  $m\downarrow$  و  $m\uparrow$  نیز نشان می‌دهند. یعنی:

$$x[n] \xrightarrow{m\downarrow} x[mn] \quad , \quad x[n] \xrightarrow{m\uparrow} x_{(m)}[n]$$